Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2024/2025
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 7 aprile 2025

1. (5 punti) La probabilità che domani piova è 1/2. La probabilità che domani Mario esca di casa è 1/3. La probabilità che domani piova o che domani Mario esca di casa è 5/6. Dati i due eventi

   $A =$ "domani piove" e $B =$ "domani Mario esce di casa"

   dire se sono indipendenti.

$P(A) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P(B) = \frac{1}{3}$

$P(A \cup B) = \frac{5}{6} = P(A) + P(B)$

$\Longrightarrow P(A \cap B) = 0 \neq P(A)\,P(B)$

A e B non sono indipendenti

2. (5 punti) In un supermercato entrano in media 3 clienti in 5'. Calcolare la probabilità che *(i)* entrino più di 4 clienti in 10'; *(ii)* entrino meno di 2 clienti in 2'; *(iii)* entrino più di 4 clienti in 10' se nei primi 5' ne sono entrati 2.

$X =$ "# clienti in 5'" $P(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

$X \sim Poi(\lambda)$ con $\lambda = 3$

$Y =$ "# clienti in 10'" $Y \sim Poi(\lambda)$, $\lambda = 6$

(i) $P(Y>4) = 1 - P(Y \leq 4) =$

$= 1 - e^{-6}\left\{1 + 6 + \dfrac{6^2}{2} + \dfrac{6^3}{3!} + \dfrac{6^4}{4!}\right\} = 0.715$

(ii) $Y =$ "# clienti in 2'"

$Y \sim Poi(\lambda)$ con $\lambda = \dfrac{2}{5} \cdot 3 = \dfrac{6}{5} = 1.2$

$P(Y<2) = P(Y=0) + P(Y=1) = 0.663$

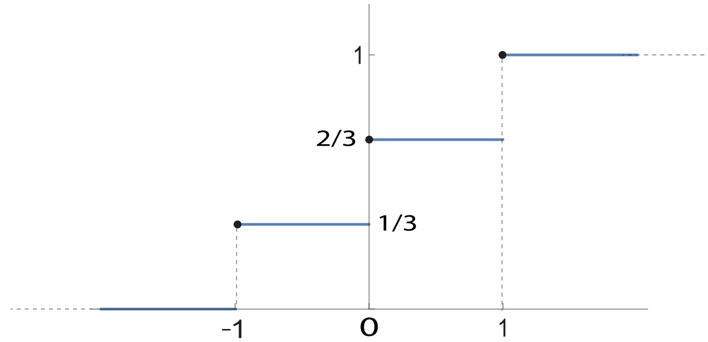
(iii) $Y =$ "# clienti in 10'"

$P(Y>4 \mid X=2) = P(Y-X > 2) = 1 - P(X-Y \leq 2)$

$= 1 - \sum_{k=0}^{2} P(X-Y=k) \simeq 0.577$

$X-Y \sim Poi(3)$

3. (5 punti) La funzione di ripartizione $F(t)$ di una variabile X ha il grafico mostrato in figura. Determinare i valori che può assumere la variabile e con quali probabilità. Si chiede inoltre: *(i)* $P(X > 0)$; *(ii)* $P(1/2 < X < 2)$; *(iii)* $P(X \leq 1)$; *(iv)* $P(X \geq -1)$



$X \in \{-1, 0, 1\}$

$P(X=0) = P(X=\pm 1) = \frac{1}{3}$

(i) $P(X>0) = P(X=1) = \frac{1}{3}$

(ii) $P\left(\frac{1}{2}<X<2\right) = P(X=1) = \frac{1}{3}$

(iii) $P(X \leq 1) = 1$

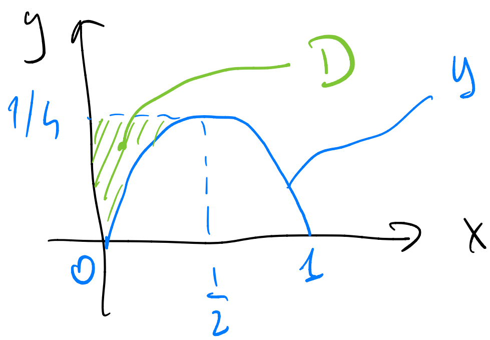
(iv) $P(X \geq -1) = 1$

4. (5 punti) Le variabili X e Y sono congiuntamente continue con didtribuzione congiunta uniforme nel dominio D dato da

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1/2, \quad x(1-x) \le y \le 1/4\}$$

e nulla altrove. Determinare *(i)* la distribuzione; *(ii)* le distribuzioni marginali, e dire se le variabili X e Y sono indipendenti; *(iii)* i valori medi di X e Y.

Dominio:



$y = x(1-x)$

$x^2 - x + y = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4y}}{2} \equiv x_{1,2}(y)$

$f(x,y) = C$ su D

Normalizzazione: $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

$C\,\|D\| = 1$

$$\|D\| = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{4} - x(1-x)\right) dx =$$

$C = \dfrac{1}{\|D\|}$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^{1/2} + \frac{x^3}{3}\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{24}$$

$C = 24$

(i) Quindi $f(x,y) = \begin{cases} 24 & (x,y) \in D \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

(ii) $f_X(x) = \int_{x(1-x)}^{1/4} c\, dy = 24\left(\frac{1}{4} - x + x^2\right)$

$0 \le x \le 1/2$

$f_Y(y) = \int_0^{x_1(y)} c\, dx = 24\, x_1(y) =$

$= 12\left(1 - \sqrt{1-4y}\right)$

$0 \le y \le \frac{1}{4}$

$f_X f_Y \neq f$ NON INDIPENDENTI

(iii) $E[X] = \int_0^{1/2} 24x\left(\frac{1}{4} - x + x^2\right) dx =$

$= 24\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{64}\right) =$

$= \frac{3}{4} - 1 + \frac{3}{8} = \frac{6-8+3}{8} = \frac{1}{8}$

$$E[Y] = \iint_D y\, c\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{1/2} dx \int_{x(1-x)}^{1/4} dy\, y \cdot 24 =$$

$$= 24 \int_0^{1/2} dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x(1-x)}^{1/4} =$$

$$= 12 \int_0^{1/2} dx \left[\frac{1}{16} - x^2 \left(1 - 2x + x^2\right) \right] =$$

$$= 12 \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{16} - x^2 + 2x^3 - x^4 \right) dx =$$

$$= 12 \left[\frac{1}{32} - \frac{1}{24} + 2 \frac{1}{64} - \frac{1}{5 \cdot 32} \right] =$$

$$= 12\left[\frac{1}{32} + \frac{1}{32} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32} - \frac{1}{24}\right] =$$

$$= 12\left(\left(2 - \frac{1}{5}\right)\frac{1}{32} - \frac{1}{24}\right) = 12\left(\frac{9}{32\cdot 5} - \frac{1}{24}\right) =$$

$$= 12\,\frac{24\cdot 9 - 32\cdot 5}{32\cdot 5\cdot 24} = 12\,\frac{216 - 160}{32\cdot 5\cdot 24} =$$

$$= \frac{56}{320} = \frac{7}{40}$$

5. (5 punti) Due variabili di Bernoulli X e Y, di parametri p_X e p_Y, hanno densità congiunta data dalla seguente matrice simmetrica:

$$\begin{pmatrix} & Y=0 & Y=1 \\ X=0 & \alpha & 1/6 \\ X=1 & 1/6 & \alpha \end{pmatrix},$$

Determinare α, p_X e p_Y, medie e varianze delle due variabili e il coefficiente di correlazione.

$$\sum_{ij} P(X=i, Y=j) = 1 \Rightarrow 2\alpha + \frac{1}{3} = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{3}$$

	0	1	
0	1/3	1/6	$\frac{1}{2}$
1	1/6	1/3	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$$p_X = p_Y = \frac{1}{2}$$

$$E[X] = E[Y] = \frac{1}{2} \qquad Var(X) = Var(Y) = \frac{1}{4}$$

$$E[XY] = \frac{1}{3} \qquad Cov(X,Y) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\rho = \frac{1/12}{\sqrt{1/4 \cdot 1/4}} = \frac{1}{12} \cdot 4 = \frac{1}{3}$$

6. (5 punti) Mario deve fare un viaggio di 6000 km. Il numero di km giornalieri è rappresentato da una variabile normale di media 500 km e deviazione standard di 80 km. Qual è la probabilità che Mario completi il viaggio in 11 giorni?

$X_k =$ "km percorsi nel giorno k"

Si chiede

$$P(X_1 + \dots + X_n \geq 6000) \quad \text{con } n = 11$$

$$P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{6000 - 5500}{80\sqrt{11}}\right) =$$

$$= P(Z \geq 1.88) = 1 - \Phi(1.88) =$$

$$= 1 - 0.9699 = 0.0301$$

(0,02975 Mathematica)

7. (5 punti) Si osserva il prezzo della benzina in 10 distributori con i seguenti risultati:

$$1.820, 1.720, 1.820, 1.832, 1.764, 1.796, 1.798, 1.782, 1.770, 1.821$$

Determinare gli intervalli di confidenza per la media con grado di fiducia del 90%, 95% e 99%.

$n = 10$ $\quad$ $n-1 = 9$ $\quad$ $\bar{X}_n = 1,79$

$S^2 = 0.0012$

$S = 0,034$

$$t_{\alpha/2}(9) = \begin{cases} 1.833 & \text{al } 90\% \\ 2.262 & \text{al } 95\% \\ 3.250 & \text{al } 99\% \end{cases}$$

$$I_\alpha = \left(\bar{X}_n - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2} , \bar{X}_n + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2} \right)$$

$$I_{90\%} = (1.77, 1,81)$$

$$I_{95\%} = (1,77, 1,82)$$

$$I_{99\%} = (1,76, 1.83)$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2024/2025
Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 7 aprile 2025

1. (5 punti) La probabilità che il treno arrivi con più di 10' di ritardo è 1/4. La probabilità che Lucia sia sul quel treno è 1/3. La probabilità che il treno arrivi con più di 10' di ritardo o che Lucia sia sul quel treno è 5/12. Dati i due eventi

   $A =$ "il treno arriva con più di 10' di ritardo" e $B =$ "Lucia è sul quel treno"

   dire se sono indipendenti.

$$P(A) = \frac{1}{4} \qquad P(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{12} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Longrightarrow P(A \cap B) = \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{1}{6} \neq P(A)\,P(B)$$

A e B non sono indipendenti

2. (5 punti) In un aeroporto atterrano in media 3 velivoli ogni 15'. Calcolare la probabilità che *(i)* atterrino più di 4 aerei in 30'; *(ii)* atterrino meno di 2 clienti in 6'; *(iii)* atterrino più di 4 aerei in 30' se nei primi 15' ne sono atterrati 2.

$X =$ "# aerei in 15'"

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$X \sim Poi(\lambda)$ con $\lambda = 3$

$Y =$ "# aerei in 30'" $\quad Y \sim Poi(\lambda),\ \lambda = 6$

(i) $P(Y>4) = 1 - P(Y \leq 4) =$

$$= 1 - e^{-6}\left\{1 + 6 + \frac{6^2}{2} + \frac{6^3}{3!} + \frac{6^4}{4!}\right\} = 0.715$$

(ii) $Y =$ "# aerei in 6'"

$$Y \sim Poi(\lambda) \text{ con } \lambda = \frac{2}{5}\cdot 3 = \frac{6}{5} = 1.2$$

$$P(Y<2) = P(Y=0) + P(Y=1) = 0.663$$

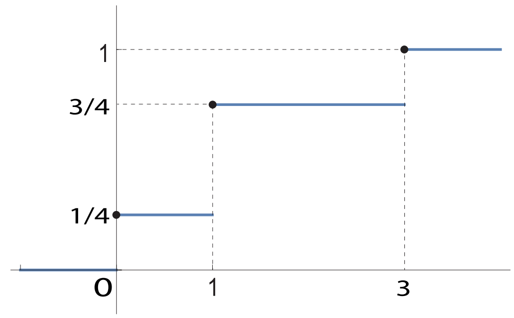
(iii) $Y =$ "# aerei in 30'"

$$P(Y>4 \mid X=2) = P(Y-X > 2) = 1 - P(X-Y \leq 2)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{2} P(X-Y=k) \simeq 0.577$$

$X-Y \sim Poi(3)$

3. (5 punti) La funzione di ripartizione $F(t)$ di una variabile X ha il grafico mostrato in figura. Determinare i valori che può assumere la variabile e con quali probabilità. Si chiede inoltre: *(i)* $P(X > 1/2)$; *(ii)* $P(1/2 < X < 2)$; *(iii)* $P(X \leq 3)$; *(iv)* $P(X \geq 0)$



$X \in \{0, 1, 3\}$

$P(X=0) = \frac{1}{4}$, $P(X=1) = \frac{1}{2}$

$P(X=3) = \frac{1}{4}$

(i) $P(X > \frac{1}{2}) = P(X=1) + P(X=3) = \frac{3}{4}$

(ii) $P(\frac{1}{2} < X < 2) = P(X=1) = \frac{1}{2}$

(iii) $P(X \leq 3) = 1$

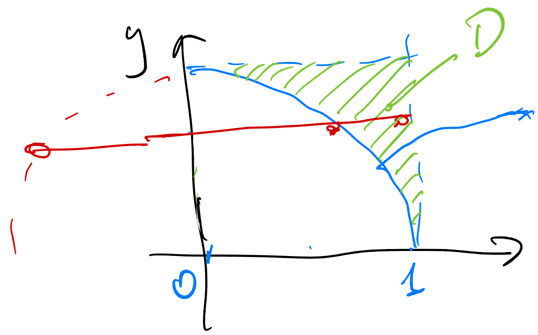
(iv) $P(X \geq 0) = 1$

4. (5 punti) Le variabili X e Y sono congiuntamente continue con didtribuzione congiunta uniforme nel dominio D dato da

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad 1 - x^2 \leq y \leq 1\}$$

e nulla altrove. Determinare *(i)* la distribuzione; *(ii)* le distribuzioni marginali, e dire se le variabili X e Y sono indipendenti; *(iii)* i valori medi di X e Y.

Dominio :



$y = 1 - x^2$

$x^2 = 1 - y$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{1-y}$

$f(x,y) = C$ su D $\qquad \equiv x_{1,2}(s)$

Normalizzazione: $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

$C\,\|D\| = 1 \qquad \|D\| = \displaystyle\int_0^1 (1 - 1 + x^2)\,dx = \frac{1}{3}$

$C = \dfrac{1}{\|D\|}$

$C = 3$

(i) Quindi $f(x,y) = \begin{cases} 3 & (x,y) \in D \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

(ii) $f_X(x) = \int_{1-x^2}^{1} c\,dy = 3x^2$

$0 \leq x \leq 1$

$$f_Y(y) = \int_{x_2(y)}^{1} c\,dx = 3(1 - x_1(y))$$

$$= 3\cdot\left(1 - \sqrt{1-y}\right)$$

$0 \leq y \leq 1$

$f_X f_Y \neq f$ NON INDIPENDENTI

(iii) $E[X] = \int_0^1 x\,3\cdot x^2\,dx = \frac{3}{4}$

$$E[Y] = \iint_D y \, c \, dx \, dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{1-x^2}^{1} dy \, y \; 3 =$$

$$= 3 \int_0^1 dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{1-x^2}^{1} =$$

$$= 3 \int_0^1 dx \left(\frac{1 - 1 + x^2}{2} \right) = 3 \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}$$

5. (5 punti) Due variabili di Bernoulli X e Y, di parametri p_X e p_Y, hanno densità congiunta data dalla seguente matrice simmetrica:

$$\begin{pmatrix} & Y=0 & Y=1 \\ X=0 & \gamma & 1/3 \\ X=1 & 1/3 & \gamma \end{pmatrix},$$

Determinare γ, p_X e p_Y, medie e varianze delle due variabili e il coefficiente di correlazione.

$$\sum_{i,j} P(X=i, Y=j) = 1 \Rightarrow 2\gamma + \frac{2}{3} = 1$$

$$\gamma = \frac{1}{6}$$

	0	1	
0	1/6	1/3	$\frac{1}{2}$
1	1/3	1/6	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$$p_X = p_Y = \frac{1}{2}$$

$$E[X] = E[Y] = \frac{1}{2} \qquad Var(X) = Var(Y) = \frac{1}{4}$$

$$E[XY] = \frac{1}{6} \qquad Cov(X,Y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$$

$$\rho = \frac{-1/12}{\sqrt{1/4 \cdot 1/4}} = -\frac{1}{12} \cdot 4 = -\frac{1}{3}$$

6. (5 punti) Mario deve fare un viaggio di 12 giorni. La spesa giornaliera è rappresentata da una variabile normale di media 55 euro e deviazione standard di 8 euro. Qual è la probabilità che a Mario bastino 650 euro?

X_k = "soldi spesi nel giorno k"

Si chiede

$$P(X_1 + \dots + X_n \le 650) \quad \text{con } n = 12$$

$$P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{650 - 660}{8\sqrt{12}}\right) =$$

$$= P(Z \le -0.36) = 1 - \Phi(0.36) =$$

$$= 1 - 0.6406 = 0.3594 \qquad (0.3591 \text{ Mathematica})$$

7. (5 punti) Si osserva il prezzo in euro di un cappuccino in 10 bar diversi con i seguenti risultati:

$$1.52, 1.40, 1.82, 1.35, 1.55, 1.72, 1.80, 1.55, 1.58, 2.05$$

Determinare gli intervalli di confidenza per la media con grado di fiducia del 90%, 95% e 99%.

$n = 10$ $\quad n-1 = 9$ $\quad \bar{X}_n = 1.63$

$S^2 = 0.045$

$S = 0.21$

$$t_{\alpha/2}(9) = \begin{cases} 1.833 & \text{al } 90\% \\ 2.262 & \text{al } 95\% \\ 3.250 & \text{al } 99\% \end{cases}$$

$$I_\alpha = \left(\bar{X}_n - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2} , \bar{X}_n + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2} \right)$$

$I_{90\%} = (1.51, 1.76)$

$I_{95\%} = (1.48, 1.79)$

$I_{99\%} = (1.42, 1.85)$